3次元球面内のKirchhoff弾性棒について (リーマン部分多様体の総合的研究)

川久保, 哲

数理解析研究所講究録 1292 巻 2002 年 136-145

3 次元球面内の Kirchhoff 弾性棒について

大阪大学大学院理学研究科　川久保 哲* (Satoshi Kawakubo)

Department of Mathematics,
Graduate School of Science,
Osaka University

1 序

Kirchhoff 弾性棒とは，ピアノ線のような非常に弾性の強い針金の数学的モデルの一つである．Kirchhoff 弾性棒の特別な場合 (捩れのない場合)である弾性曲線に関しては，Willmore 曲面の具体例の構成という応用もあり，様々な Riemmann 多様体内で研究されている (cf. [1], [7], [11], etc.). 一方，一般の Kirchhoff 弾性棒に関しては，Euclid 空間内以外で考えられたものはあまり多くない (cf. [9],[5]). Langer-Singer は [9] において，3 次元空間形内での Kirchhoff 弾性棒の変分問題を Hamilton 系とみて，その Liouville 可積分性を示している．3 次元空間形の中でも，特に $\mathbf{R}^3$ の場合には，円柱座標を用いれば，Kirchhoff 弾性棒が Jacobi の sn 関数で explicit に 表わされるという結果 (Shi-Hearst ([12]), Langer-Singer ([10])) が得られている．さらに Ivey-Singer ([3]) は，この sn 関数による表示を用いて Kirchhoff 弾性棒が閉じるための条件を楕円積分で表し，それにより $\mathbf{R}^3$ 内の閉 Kirchhoff 弾性棒を完全に分類し結び目型の決定等を行っている．

本稿では，3 次元定曲率球面内の Kirchhoff 弾性棒の場合でも，ある座標を用いれば sn 関数を用いて explicit に表わすことができることを示す (定理 8). また，Kirchhoff 弾性棒が閉じるための必要十分条件を楕円積分を用いて表し (定理 9)，それを用いてある閉 Kirchhoff 弾性棒の族の例を構成する (定理 10).

2 エネルギーとその Euler-Lagrange 方程式

特に断りがない限り，多様体，曲線等はすべて，C^∞ 級とする．$\mathcal{M}$ を n 次元 Riemann 多様体とする．$\gamma=\gamma(t):[t_1,t_2]\to\mathcal{M}$ を速さが 1 の滑らかな曲線とし，$M=(M_1,M_2,\dots,M_{n-1})$ を γ に沿った法束 $T^\perp\mathcal{M}$ の滑らかな正規直交枠場とする．M はピアノ線の振れ方を表すものである．このような γ と M の組 $\{\gamma,M\}$ に対して，曲げと捩れの両方の効果を考えたエネル

*日本学術振興会特別研究員 (Research Fellow of the Japan Society for the Promotion of Science)

ギーを $\mathfrak{T}$ を次のように定義する．$\nu>0$ を (ピアノ線の材質により決まる) 定数とする．

$$\mathfrak{T}(\{\gamma, M\})=\int_{t_1}^{t_2}|\nabla_t\gamma'|^2dt+\nu\sum_{i=1}^{n-1}\int_{t_1}^{t_2}|\nabla_t^{\perp}M_i|^2dt$$

ここで，$\nabla^{\perp}$ は法束 $T^{\perp}\mathcal{M}$ の法接続を表す．右辺の第一項は，曲げの効果を表すエネルギー (弾性エネルギー) であり，第二項が捩れの効果を表すエネルギーである．

一般の Riemann 多様体内での Euler-Lagrange 方程式も計算できるが，簡単のため以下では $\mathcal{M}=\mathbf{R}^3$, S^3, H^3 とし，断面曲率は一定で G であるとする．$\mathcal{M}$ の向きを固定しておき，$\times$ で外積を表す．枠 (γ', M_1, M_2) を両端点で固定した変分 (γ の速さも 1 に固定する) に関して $\mathfrak{T}$ の第一変分公式を計算し，Euler-Lagrange 方程式を導くと次のようになる．

$$\nabla_t\Big[2(\nabla_t)^2\gamma'+(3|\nabla_t\gamma'|^2-(\mu-2G)+2\nu a^2)\gamma'-4\nu a\gamma'\times\nabla_t\gamma'\Big]=0, \tag{2.1}$$

$$\langle\nabla_t^{\perp}M_1, \gamma'\times M_1\rangle=a. \tag{2.2}$$

ここで，μ, a は定数である．なお，(2.2) は，エネルギーが臨界ならば，捩れがピアノ線の一部に集中することはなく全体に一様に分布することを示しており，定数 a が捩れ方の割合を表している．

定義 1. ある定数 μ, a が存在して，(2.1) と (2.2)が成り立つとき，$\{\gamma, M\}$ を Kirchhoff 弾性棒といい，a を $\{\gamma, M\}$ の捩れパラメータという．

注． $\{\gamma, M\}$ が，捩れパラメータが 0 の Kirchhoff 弾性棒であるための必要十分条件は，γ が弾性曲線 (弾性エネルギーが臨界となる曲線)で，かつ M が法接続で平行な枠場であることである．その意味で，Kirchhoff 弾性棒は弾性曲線の拡張になっている．

3　Kirchhoff 弾性棒の合同類のなす空間

Euler-Lagrange 方程式 (2.1)を Frenet 枠を用いて書き下し，γ の曲率 k と捩率 τ の満たす方程式を計算すると，

$$2k''+k^3+(2\nu a^2-(\mu-2G))k-2k\tau(\tau-2\nu a)=0, \tag{3.1}$$

$$k^2(\tau-2\nu a)=b \tag{3.2}$$

となる．ここで b は定数である．この解は Jacobi の sn 関数を用いて explicit に書けることがわかり，このことから次が得られる．なお，$\{\gamma(t), M(t)\}$ に対して，t の平行移動と向きの逆転，$\mathcal{M}$ の等長変換，M への $O(2)$ の右からの作用，を有限回合成した変換を合同変換ということにする．

命題 2. $\mathcal{M}=S^3$ とする. $\mathcal{M}$ 内の, $\mathbf{R}$ 上で定義された Kirchhoff 弾性棒 (ただし γ は測地線ではないとする. γ が測地線となる Kirchhoff 弾性棒は比較的自明なものとなるので, 以下では考えないことにする.) の合同類全体のなす空間は,

$$\beta>0,\ w>0,\ 0\leqslant p\leqslant w\leqslant 1$$

をみたす4つの実数の組 (β,η,p,w) のなす空間と1対1に対応する. (ただし, $p=w$ または $w=1$ のとき, (β,η,p,w) は $(\beta,-\eta,p,w)$ と同一視するものとする.) (β,η,p,w) には, γ の曲率, 振率が

$$k(t)=\sqrt{G\beta\left(1-\frac{p^2}{w^2}\mathrm{sn}^2\left(\frac{\sqrt{G\beta}}{2w}t,p\right)\right)}, \tag{3.3}$$

$$\tau(t)=\pm\left[\left(\frac{(G\beta)^{3/2}\sqrt{(1-w^2)(w^2-p^2)}}{2w^2}\right)\frac{1}{k(t)^2}+\nu\eta\sqrt{G\beta}\right], \tag{3.4}$$

振れパラメータが $\pm\eta\sqrt{G\beta}$ であるような Kirchhoff 弾性棒の合同類が対応する.

注. 上では $\mathcal{M}=S^3$ としたが, $\mathbf{R}^3$, H^3 の場合でも同様なことが成り立つ.

上で, elliptic modulus p の動く範囲は $0\leqslant p\leqslant 1$ であるが, 特に $p=0$ のとき γ は螺旋 (つまり曲率も振率も一定) となる. また, $p=1(\Leftrightarrow p=w=1)$ のときに限り曲率 k は周期的とはならず, γ の形は他の場合とかなり異なったものとなる. なお, $\mathbf{R}^3$, S^3, H^3 内の Kirchhoff 弾性棒の中心曲線 γ は渦糸方程式の進行波解となることが示せるのだが, 特に $p=1$ の時はソリトンタイプの解になる. $\mathbf{R}^3$ の場合, このソリトン解は Hasimoto ([2]) により得られているものと同じものである. そこで $p=1$ の時の γ を Hasimoto ソリトンとよぶことにする. これら2つの場合 (螺旋の場合と Hasimoto ソリトンの場合) を除けば, k, τ は同じ最小周期をもつ周期関数になっている.

4 座標の構成

適切な座標を構成し, 解を explcit に表すために, Langer-Singer と同様な Killing ベクトル場を使う方法を用いる. 次の命題を使う.

命題 3 ([8]). $\gamma=\gamma(t)$ を $\mathcal{M}=\mathbf{R}^3,S^3,H^3$ 内の速さ1の曲線で, 曲率がすべての点で正であるようなものとし, (T,N,B) で γ に沿う Frenet 枠を表す. Λ を γ に沿うベクトル場とする. このとき, Λ が $\mathcal{M}$ 上の Killing ベクトル場に拡張できるための必要十分条件は,

Λ が次の 3 つの線形常微分方程式をみたすことである.

$$\langle \nabla_t \Lambda, T \rangle = 0,$$
$$\left\langle (\nabla_t)^2 \Lambda + G\Lambda, N \right\rangle = 0,$$
$$\left\langle (\nabla_t)^3 \Lambda - \frac{k'}{k}(\nabla_t)^2 \Lambda + (G + k^2)\nabla_t \Lambda - \frac{k'}{k} G\Lambda, B \right\rangle = 0.$$

(拡張が一意的であることも示せる.) このような Λ を γ に沿った Killing ベクトル場とよぶ.

以下, 本稿の最後まで $\mathcal{M} = S^3$ とする. $\{\gamma, M\}$ を $\mathcal{M}$ 内の Kirchhoff 弾性棒とする. γ に 沿うベクトル場 J, H, I_+, I_- を

$$J = 2(\nabla_t)^2\gamma' + (3k^2 - \mu + 2\nu a^2)\gamma' - 4\nu a\gamma' \times \nabla_t \gamma' \tag{4.1}$$
$$H = 2\nu a\gamma' + \gamma' \times \nabla_t \gamma', \tag{4.2}$$
$$I_+ = J + 2\sqrt{G}H, \tag{4.3}$$
$$I_- = J - 2\sqrt{G}H, \tag{4.4}$$

で定義する. すると, k, τ を求める際にでてくる積分定数 ((3.2) の b, 及び (3.1) から導きだせるもう一つの定数) を用いると, 計算により次が成り立つことがわかる.

命題 4. J, H, I_+, I_- は γ に沿った Killing ベクトル場である.

$\tilde{J}$, $\tilde{H}$, $\tilde{I}_+$, $\tilde{I}_-$ を J, H, I_+, I_- を S^3 上の Killing ベクトル場に拡張したものとする. さて, 積分定数を用いてさらに計算することにより, 次が成り立つことがわかる.

命題 5. $\mathbf{R}$ 上の関数 $\langle J, H \rangle$, $|I_+|$, $|I_-|$ はすべて定数関数である.

いいかえると, S^3 上の関数 $\langle \tilde{J}, \tilde{H} \rangle$, $|\tilde{I}_+|$, $|\tilde{I}_+|$ は, 曲線 γ の上では一定である. 実は, さらに強いことが成り立つ.

命題 6. S^3 上の関数 $\langle \tilde{J}, \tilde{H} \rangle$, $|\tilde{I}_+|$, $|\tilde{I}_+|$ はすべて定数関数である.

(証明の概略). γ が螺旋でない場合 (generic な場合) のみを述べることにする. $|\tilde{I}_+|$ が S^3 全体で一定ではないと仮定して矛盾を導く. まず, $|\tilde{I}_+|$ は γ 上では一定であることから, 曲線 γ の像は関数 $|\tilde{I}_+|$ のレベル曲面に収まってしまうことがわかる. 今, $\tilde{I}_+$ は Killing ベクトル場であるから, $|\tilde{I}_+|$ のレベル曲面とは Clifford トーラスにほかならない. このことと, $\{\gamma, M\}$ が Kirchhoff 弾性棒であることを用いると, やや面倒な計算により, γ は螺旋とならざるを得ないことが示せて, 矛盾が出る. よって, $|\tilde{I}_+|$ は S^3 全体上で一定とならざるを得ない. 同様にして,

$|\tilde{I}_-|$ も S^3 全体上で一定となることがわかり，従って，$\langle\tilde{J},\tilde{H}\rangle = (|\tilde{I}_+|^2 - |\tilde{I}_-|^2)/(8\sqrt{G})$ も S^3 全体上で一定である． □

これらの Killing ベクトル場を用いて座標を定めよう．まず，S^3 を Euclid 空間 $\mathbf{R}^4 = \{{}^t(x_1,x_2,x_3,x_4)\}$ に半径 $1/\sqrt{G}$ の球面として等長的に埋め込んでおく．(埋め込みを $\iota : S^3 \hookrightarrow \mathbf{R}^4$ とかく．) 次の関係によって座標系 (r,θ,ψ) を定める．

$$x_1 = r\cos\theta,\ \ x_2 = r\sin\theta,\ \ x_3 = \bar{r}\cos\psi,\ \ x_4 = \bar{r}\sin\psi$$

ここで $r>0$ であり，また $\bar{r} = \sqrt{\frac{1}{G} - r^2}$ とおいた．(この座標は $\mathbf{R}^3$ での円柱座標に相当するもので，$r = const.$ で得られる曲面は Clifford torus になっている．)

さて，Y を S^3 上の任意の Killing ベクトル場とすると，ある 4 次の実歪対称行列 A_Y が一意的に存在して，

$$Y(\boldsymbol{x}) = A_Y\boldsymbol{x} \qquad (\boldsymbol{x} = {}^t(x_1,x_2,x_3,x_4) \in S^3).$$

と表される．この A_Y を，埋め込み $\iota : S^3 \hookrightarrow \mathbf{R}^4$ に関する Y の表現行列とよぶことにする．$P \in O(4)$ とすると，埋め込み $P\circ\iota$ に関する Y の表現行列は PA_YP^{-1} となる．$P\in O(4)$ をうまくとれば，PA_YP^{-1} は標準形，即ち，

$$\begin{pmatrix} 0 & -\sigma_1 & 0 & 0 \\ \sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sigma_2 \\ 0 & 0 & \sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \qquad (\sigma_1,\sigma_2 \in \mathbf{R}) \tag{4.5}$$

の形にすることができることに注意する．従って，ある $P\in O(4)$ をうまくとると，$P\circ\iota$ に関する $\tilde{J}$ の表現行列を標準形にすることができる．ところが，実はさらに強く次のことが成り立つ．

命題 7. ある $P \in O(4)$ をうまくとると，埋め込み $P\circ\iota$ に関する $\tilde{J}$, $\tilde{H}$, $\tilde{I}_+$, $\tilde{I}_-$ の表現行列が全て標準形となるようにできる．

(証明の概略)．γ が螺旋ではない場合のみを述べる．まず，$P\in O(4)$ をうまくとると，$P\circ\iota$ に関する $\tilde{J}$ の表現行列を標準形 (4.5) にすることができる．このとき，$\tilde{H}$, $\tilde{I}_+$, $\tilde{I}_-$ の表現行列も標準形となることを示そう．まず，γ が螺旋でないことから，$|J(t)|$ は定数関数ではないことが確かめられ (J を Frenet 枠で表せばすぐにわかる)，従って，$|\sigma_1| \neq |\sigma_2|$ である．このことと，$\langle\tilde{J},\tilde{H}\rangle$ が S^3 上一定である (命題 6) ことから，行列計算を行うことにより，$\tilde{H}$ の表現行列も標準形になってしまうことが示せる．(ただしここでも γ が螺旋ではないという仮定が効いている．) $\tilde{I}_+$ 及び $\tilde{I}_-$ は，$\tilde{J}$ と $\tilde{H}$ の一次結合であるから，これらも標準形となる． □

命題 7 のような P をとり，埋め込み $P\circ\iota$ に対して上のような座標 (r,θ,ψ) をとる．

5 explicit な解

ここでは，γ 自身を explicit に表す定理を述べる．第3種不完全楕円積分を，

$$\Pi(x,\alpha,p)=\int_0^x \frac{dx}{1-\alpha\,\mathrm{sn}^2(x,p)}$$

で定義する．ここで，$\alpha\leqslant 1,\ 0\leqslant p\leqslant 1$ である．

定理 8. $\{\gamma,M\}$ を S^3 内の Kirchhoff 弾性棒とする．命題 7 のような $P\in O(4)$ をとり，埋め込み $P\circ\iota$ に対して座標 (r,θ,ψ) をとる．$\gamma(t)$ の r, θ, ψ 成分を $r(t)$, $\theta(t)$, $\psi(t)$ とする．また，γ は $r=0$, $\bar{r}=0$ となる点を通らないと仮定する．(generic な Kirchhoff 弾性棒はこの条件をみたす．) このとき，

$$\begin{aligned}
r(t)&=\sqrt{c_1\mathrm{sn}^2(c_2t,c_3)+c_4},\\
\theta(t)&=c_5t+c_6\Pi(c_2t,c_7,c_3),\\
\psi(t)&=c_8t+c_9\Pi(c_2t,c_{10},c_3),
\end{aligned}$$

ここで，$c_1,c_2,\dots,c_{10}$ は定数であり，これらは合同類を表すパラメタ (β,η,p,w) で explicit に表せる．

注． γ が $r=0$ もしくは $\bar{r}=0$ となる点 (つまり座標 (r,θ,ψ) が定義できない点) を通る場合もあるが，この時も $r(t)$, $\theta(t)$, $\psi(t)$ は explicit に表せることが示せる．従って，全ての場合に γ は explicit に表せる．

(証明の概略)．以下，γ が螺旋でないときのみを述べる．(γ が螺旋のときは，座標系のとり方を少しだけ変えて証明しなければならないが，結果的に定理の主張が成り立つことが示せる．)

さて，座標からできる自然なベクトル場 $\partial/\partial\theta$, $\partial/\partial\psi$ は S^3 上の Killing ベクトル場に自然に拡張でき，それらの行列表示はそれぞれ，

$$E_1:=\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\qquad E_2:=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

となることに注意しておく．

$\tilde{I}_+$, $\tilde{I}_-$ は S^3 上で長さ一定である (命題 6) ことを用いると次が示せる．必要ならば座標軸 x_1,x_2,x_3,x_4 を置換する直交変換を施すことにより，行列表示を $A_{\tilde{I}_+}=fE_1+fE_2$,

$A_{\tilde{I}_-} = -gE_1 + gE_2$ とすることができる．ここで，f, g は正定数である．従って次が成り立つ．

$$\tilde{I}_+ = f\frac{\partial}{\partial\theta} + f\frac{\partial}{\partial\psi}, \tag{5.1}$$

$$\tilde{I}_- = -g\frac{\partial}{\partial\theta} + g\frac{\partial}{\partial\psi}, \tag{5.2}$$

$$\tilde{J} = \left(\frac{f-g}{2}\right)\frac{\partial}{\partial\theta} + \left(\frac{f+g}{2}\right)\frac{\partial}{\partial\psi}, \tag{5.3}$$

$$\tilde{H} = \left(\frac{f+g}{4\sqrt{G}}\right)\frac{\partial}{\partial\theta} + \left(\frac{f-g}{4\sqrt{G}}\right)\frac{\partial}{\partial\psi}. \tag{5.4}$$

なお，長い式になるので省略するが，f, g は β, η, p, w で explicit に表すことができる．

まず，$r(t)$ を求めよう．(5.4)より，

$$|H(t)|^2 = |\tilde{H}(\gamma(t))|^2 = \left(\frac{f+g}{4\sqrt{G}}\right)^2 r(t)^2 + \left(\frac{f-g}{4\sqrt{G}}\right)^2 \left(\frac{1}{G} - r(t)^2\right).$$

一方，H の定義より，$|H(t)|^2 = k(t)^2 + 4\nu^2a^2$ である．従って

$$r(t) = \sqrt{\frac{1}{4fg}\left[16G(k(t)^2 + 4\nu^2a^2) - \frac{(f-g)^2}{G}\right]}.$$

命題 2 の $k(t)$ の式を代入すれば，$r(t)$ の式を得る．

次に，(5.1) と (5.2) より

$$\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)_{\gamma(t)} = \frac{1}{2fg}(gI_+ - fI_-), \quad \left(\frac{\partial}{\partial\psi}\right)_{\gamma(t)} = \frac{1}{2fg}(gI_+ + fI_-)$$

である．従って

$$\theta'(t) = \frac{\left\langle T, \left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)_{\gamma(t)}\right\rangle}{\left|\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)_{\gamma(t)}\right|^2} = \frac{\langle T, gI_+ - fI_-\rangle}{2fgr(t)^2}.$$

となる．(4.1) と (4.2) を上の式に代入し，積分すれば $\theta(t)$ の表示を得る．$\psi(t)$ も同様である．

□

6　閉じるための条件

γ が周期的な Kirchhoff 弾性棒 (M は周期的でなくてもよい) を，閉 Kirchhoff 弾性棒ということにする．ここでは，S^3 内の Kirchhoff 弾性棒が，閉 Kirchhoff 弾性棒になるための条件を求める．

まず，前節の定理 8 の c_3 は p に等しいことを注意しておく．定理 8 から，γ が螺旋のとき (即ち $p=0$ のとき) と，Hasimoto ソリトンのとき (即ち $p=1$ のとき) を除くと，$k(t)$, $r(t)$, $\theta'(t)$, $\psi'(t)$ は同じ最小周期をもつ周期関数であることがわかる．その最小周期を h とし，

$$\Delta\theta = \theta(t+h) - \theta(t), \qquad \Delta\psi = \psi(t+h) - \psi(t)$$

とおく．($\theta'(t)$, $\psi'(t)$ は h を周期にもつので，上の右辺は t によらない．) つまり，$\Delta\theta$, $\Delta\psi$ は r の 1 周期における θ, ψ の変動量である．これらは次のように表せる．

$$\Delta\theta = d_1 + d_2\Pi(K(c_3), d_3, c_3), \quad \Delta\psi = d_4 + d_5\Pi(K(c_3), d_6, c_3),$$

ここで，K は第 1 種完全楕円積分を表す．また，$d_1, \ldots, d_6$ は定数であり，(β, η, p, w) で explicit に表せる．従って $\Delta\theta$, $\Delta\psi$ は (β, η, p, w) で explicit に表されている．

定理 9. $\{\gamma, M\}$ を S^3 内の Kirchhoff 弾性棒とする．γ は螺旋でもなく，Hasimoto ソリトンでもないと仮定する．このとき，$\{\gamma, M\}$ が閉 Kirchhoff 弾性棒になるための (β, η, p, w) が満たすべき必要十分条件は，$\Delta\theta(\beta, \eta, p, w)/2\pi$ と $\Delta\psi(\beta, \eta, p, w)/2\pi$ が共に有理数であることである．

注意. γ が螺旋のときは，r, θ', ψ' は定数となり，これらも (β, η, p, w) で explicit に表せる．このとき $\{\gamma, M\}$ が閉になるための必要十分条件は θ' 対 ψ' が有理数比になることである．また，γ が Hasimoto ソリトンのときは決して閉 Kirchhoff 弾性棒にならない．

7 閉 Kirchhoff 弾性棒の例

定理 9 を用いることにより，閉 Kirchhoff 弾性棒の族の例が構成できる．

定理 10. 閉 *Kirchhoff* 弾性棒からなる滑らかな族 $\{\gamma^{\lambda,\omega}, M^{\lambda,\omega}\}$ $(0 \leqslant \lambda \ll 1,\ |\omega| \ll 1)$ で次をみたすものが存在する．$\lambda = 0$ のとき $\gamma^{\lambda,\omega}$ は螺旋であり，$\lambda \neq 0$ のとき $\gamma^{\lambda,\omega}$ は螺旋ではない．また，$(\lambda_1, \omega_1) \neq (\lambda_2, \omega_2)$ ならば $\{\gamma^{\lambda_1,\omega_1}, M^{\lambda_1,\omega_1}\}$ と $\{\gamma^{\lambda_2,\omega_2}, M^{\lambda_2,\omega_2}\}$ は合同ではない．

(証明の概略). $\Delta\theta(\beta, \eta, p, w)$, $\Delta\psi(\beta, \eta, p, w)$ を (β, η, p, w) の形式的な関数とみなす．$p=0$ のとき，対応する γ は螺旋となるので，$\Delta\theta$, $\Delta\psi$ に幾何的な意味はないのだが，$\Delta\theta(\beta, \eta, 0, w)/(2\pi)$ と $\Delta\psi(\beta, \eta, 0, w)/(2\pi)$ の値が共に有理数となるような $(\beta, \eta, 0, w)$ は無限に存在することが示せる．このような点を一つとり，$(\beta_0, \eta_0, 0, w_0)$ とおく．計算により，

$$\left.\frac{D(\Delta\theta, \Delta\psi)}{D(\beta, \eta)}\right|_{(\beta_0, \eta_0, 0, w_0)} \neq 0 \tag{7.1}$$

(ただし，左辺は Jacobian をあらわす) が示されるので，陰関数定理より，$(p,w)=(0,w_0)$ の近傍で

$$\Delta\theta(\beta(p,w),\eta(p,w),p,w)/(2\pi)=\Delta\theta(\beta_0,\eta_0,0,w_0)/(2\pi),$$
$$\Delta\psi(\beta(p,w),\eta(p,w),p,w)/(2\pi)=\Delta\psi(\beta_0,\eta_0,0,w_0)/(2\pi)$$

となるような滑らかな関数 $\beta(p,w),\eta(p,w)$ が存在する．上の式の右辺は共に有理数であるから，定理 9 より，$(\beta(p,w),\eta(p,w),p,w)$ $(p\geqslant 0)$ に対応する Kirchhoff 弾性棒は閉 Kirchhoff 弾性棒である．$\lambda=p$, $\omega=w-w_0$ とおけば，求めるべき閉 Kirchhoff 弾性棒の 2 パラメタ族 $\{\gamma^{\lambda,\omega},M^{\lambda,\omega}\}$ $(0\leqslant\lambda\ll 1,\ |\omega|\ll 1)$ が得られる． □

螺旋は，閉 Kirchhoff 弾性棒の中でもある意味で自明なものと言えるが，上の定理から，螺旋以外にも閉 Kirchhoff 弾性棒が無限に存在することがわかる．

References

[1] M. Barros and O. Garay and D. Singer, *Elasticae with constant slant in the complex projective plane and new examples of Willmore tori in five spheres*, Tohoku Math. J. (2) **51** (1999), 177–192.

[2] H. Hasimoto, *A soliton on a vortex filament*, J. Fluid Mech. **51** (1972), 477–485.

[3] T. Ivey and D. Singer, *Knot types, homotopies and stability of closed elastic rods*, Proc. London Math. Soc. (3) **79** (1999), 429–450.

[4] S. Kawakubo, *Stability and bifurcation of circular Kirchhoff elastic rods*, Osaka J. Math. **37** (2000), 93–137; Errata, Osaka J. Math. **37** (2000), 525.

[5] S. Kawakubo, *Kirchhoff elastic rods in a Riemmanian manifold*, Tohoku Math. J. **54** (2002), 179–193.

[6] S. Kawakubo, *Kirchhoff elastic rods in the 3-sphere*, preprint.

[7] J. Langer and D. Singer, *Curves in the hyperbolic plane and mean curvature of tori in 3-space*, Bull. London. Math. Soc. **16**(1984), 531–534.

[8] J. Langer and D. Singer, *The total squared curvature of closed curves*, J. Differential Geom. **20** (1984), 1–22.

[9] J. Langer and D. Singer, *Liouville integrability of geometric variational problems*, Comment. Math. Helvetici **69** (1994), 272–280.

[10] J. Langer and D. Singer, *Lagrangian aspects of the Kirchhoff elastic rod*, SIAM Rev. **38** (1996), 605–618.

[11] U. Pinkall, *Hopf tori in S^3*, Invent. Math. **81** (1985), 379–386.

[12] Y. Shi and J. Hearst: *The Kirchhoff elastic rod, the nonlinear Schrödinger equation, and DNA supercoiling*, J. Chem. Phys. **101** (1994), 5186–5200.

1-1 Machikaneyama-cho, Toyonaka, Osaka 560-0043, Japan
E-mail: `satoshi@gaia.math.wani.osaka-u.ac.jp`